Espaces Vectoriels Normés

Aubin SIONVILLE

MPI Clemenceau - 2021-2023

Normes

$$||\cdot|| \text{ est une norme sur E} \iff \forall (x,y,\alpha) \in E^2 \times \mathbb{K}, \begin{cases} ||x+y|| \leq ||x|| + ||y|| \\ ||\alpha x|| = |\alpha| ||x|| \\ ||x|| = 0 \implies x = 0 \end{cases}$$

Normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

$$||x||_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$$

Normes usuelles sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$

$$||f||_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

$$||f||_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\,dx}$$

$$||f||_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

Distance associée à une norme

$$d: \begin{array}{ccc} E^2 & \to & \mathbb{R}^+ \\ (x,y) & \mapsto & N(y-x) \end{array}$$

$$\forall (x,y) \in E^2, d(x,y) = 0 \iff x = y$$

$$\forall (x,y,z) \in E^3, d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

Boule ouverte de centre a et de rayon r

$$B(a,r) = \{x \in E \mid N(x-a) < r\}$$

Boule fermée de centre a et de rayon r

$$\bar{B}(a,r) = \{x \in E \mid N(x-a) \leq r\}$$

Sphère de centre a et de rayon r

$$\{x \in E \mid N(x-a) = r\}$$

Caractère borné

Une partie $A \subset E$ est bornée si $\exists M > 0, \forall x \in A, ||x|| \leq M$

Une suite u est bornée si $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, ||u_n|| \leq M$

Une fonction f est bornée si $\exists M > 0, \forall x \in \mathbb{R}, ||f(x)|| \leq M$

Comparer les normes

$$\boxed{||\cdot|| \text{ et } N \text{ sont equivalentes si } \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2, \forall x\in E, \begin{cases} N(x)\leq \alpha||x|| \\ ||x||\leq \beta N(x)\end{cases}}$$

Sur un espace vectoriel <u>de dimension finie</u>, $\boxed{\text{toutes les normes sont equivalentes}}$.

Suites

Limite de suite

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E. $u_n \longrightarrow l$ si

$$\boxed{\forall\epsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n\geq N, ||u_n-l||<\epsilon}$$

Convergence uniforme

La norme ∞ est la norme de la convergence uniforme : $||f||_\infty = \sup_{t\in I}|f(t)|$

$$\boxed{f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f \iff ||f_n-f||_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \iff \sup_{t\in I}|f_n(t)-f(t)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \iff (f_n) \text{ cvu vers } f}$$

Adhérence

Vecteur adhérent à un ensemble

$l\in E$ est adhérent à A si toute boule ouverte de centre l rencontre A :
$\forall r>0, B(l,r)\cap A\neq\emptyset$

Adhérence d'un ensemble

$$\boxed{\bar{A} = \{l\in E \mid l \text{ est adhérent à } A\}}$$

Caractérisation séquentielle de l'adhérence

$$\boxed{l\in E \text{ est adhérent à } A \iff \exists(u_n)\in A^{\mathbb{N}}, u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l}$$

Partie dense d'un ensemble

$$\boxed{A \text{ est dense dans } E \iff \bar{A}=E}$$

Continuité

$$\boxed{f \text{ est continue en } a \text{ si } f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a) \text{ pour tout } x\in E}$$

$$\boxed{f \text{ est continue sur } I \text{ si } f \text{ est continue en tout point de } I}$$

f est uniformément continue sur I si
$\forall\epsilon>0, \exists\delta>0, \forall x,y\in I, ||x-y||<\delta \implies ||f(x)-f(y)||<\epsilon$

f est K-lipschitzienne sur I si
$\forall x,y\in I, ||f(x)-f(y)||\leq K||x-y||$

$$\boxed{\text{lipschitzienne} \implies \text{uniformément continue} \implies \text{continue}}$$

Linéarité et continuité

$$\text{Si } f \text{ est } \underline{\text{linéaire}}, \quad f \text{ est continue sur E} \begin{array}{l} \iff \text{f est continue en 0} \\ \iff \text{f est bornée sur la boule unite de } E \\ \iff \exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in E, ||f(x)|| \leq K||x|| \\ \iff f \text{ est lipschitzienne sur } E \\ \iff f \text{ est uniformément continue sur } E \end{array}$$

Si $f : E \to F$ est <u>linéaire</u> et E <u>de dimension finie</u>, f est lipschitzienne donc continue sur E

Multilinearité et continuité

Soit une norme $||(x_1, \dots, x_n)|| = \max\{||x_1||, \dots, ||x_n||\}$ sur $E_1 \times \cdots \times E_n$.
Soit $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ une fonction <u>multilinéaire</u>.

$$f \text{ est continue} \iff \exists K \in \mathbb{R}, \forall (x_1 \dots x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i, \quad ||f(x_1, \dots, x_n)|| \leq K||x_1|| \dots ||x_n||$$

C'est en particulier le cas si les E_i sont de dimension finie.

Norme subordonnée

$$\forall f \in \underbrace{\mathcal{L}_c(E, F)}_{\text{f° linéaires et continues}},$$

$|||f|||$ est le plus petit K tel que $\forall x \in E, ||f(x)|| \leq K||x||$:

$$|||f||| = \sup_{x \neq 0_E} \frac{||f(x)||}{||x||} = \sup_{||x||=1} ||f(x)||$$

Sous-multiplicativité

$|||\cdot|||$ est sous-multiplicative : $\forall (f, g) \in \mathcal{L}_c(E, F), |||f \circ g||| \leq |||f|||\ |||g|||$

Ouverts et fermés

Point intérieur à A	Ouvert	Fermé
$x \in A$ est intérieur à A si $\exists \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \subset A$	A est un ouvert si $\forall x \in A, \exists \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \subset A$	A est un fermé si $E \setminus A$ est ouvert

L'image réciproque (f^{-1}) par une fonction <u>continue</u> d'un $\left|\begin{array}{l}\text{ouvert}\\\text{fermé}\end{array}\right.$ est un $\left|\begin{array}{l}\text{ouvert}\\\text{fermé}\end{array}\right.$.

Soit A une partie d'un espace vectoriel E.

$\bar{A}$ est un fermé de E

A est un fermé de E $\iff \bar{A} = A$

A est un fermé de E $\iff \forall (u_n) \in A^{\mathbb{N}}$, (u_n) cv $\implies \lim_{n\to\infty} u_n \in A$